Teoretická část - 5.1.2022

1. (a) Definujte stacionární bod, Jacobiho rovnici a konjugovaný bod ($2,5$ bodu).

   (b) Zformulujte větu o Lagrangeových multiplikátorech a Jacobiho větu ($2,5$ bodu).

   (c) Větu o Lagrangeových multiplikátorech dokažte (2 body).

   (d) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro Banachův prostor $(X, ||\cdot||)$ a funkcionály $F, G : X \to \mathbb{R}$.

      i. Je-li $x \in X$ stacionární bod F i G, potom je x stacionátní bod $F + G$.

      ii. Je-li $x \in X$ stacionární bod F i G, potom je x stacionátní bod $F \cdot G$.

   Vše řádně zdůvodněte (1 bod).

2. (a) Definujte bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci (2 body).

   (b) Zfromulujte a dokažte větu o stejnoměrné konvergenci derivací (4 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení

      i. nechť $\{f_n\} \subset C([1,3])$, $f \in C([1,3])$ a nechť $f_n \to f$ na $[1,3]$, potom $(R)\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n$,

      ii. nechť $\{f_n\} \subset C([1,3])$, $f \in C([1,3])$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[1,3]$, potom $(R)\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n$,

      iii. nechť $\{f_n\} \subset C^1([1,3])$, $f \in C^1([1,3])$ a nechť $f_n' \rightrightarrows f'$ na $[1,3]$, potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[1,3]$.

   Vše řádně zdůvodněte (2 body).

3. (a) Definujte ortogonální, ortonormální a úplnou množinu a abstraktní Fourierovu řadu (3 body).

   (b) Zfromulujte větu o Besselově nerovnosti a Parsevalově rovnosti a větu o charakterizaci úplnosti ortonormální množiny (2, 5 bodu).

   (c) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro Hilbertův prostor H a dvě jeho ortonormální množiny

$$P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{a} \quad Q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

      i. Množina $\{p_n + q_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální.
      ii. Množina $\{p_n + q_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální.
      iii. Množina $\{p_n + p_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální.
      iv. Množina $\{p_n + p_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální.
      v. Je-li množina P úplná, potom je rovněž úplná množina $\{p_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

      Vše řádně zdůvodněte (2, 5 bodu).